多面体的外接球

感悟高考

2020全国I卷 已知A,B,C为球O的球面上的三点,$\odot O_1$为ΔABC的外接圆.若$\odot O_1$的面积为4π,$AB=BC=CA=OO_1$,则球O的表面积为（ ）

A. 64π　　B. 48π　　C. 36π　　D. 32π

(2022 全国新高考 I 卷)已知正四棱锥的侧棱长为l，其各顶点都在同一球面上，若该球的体积为36π，且$3\leq l\leq 3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是(　　)

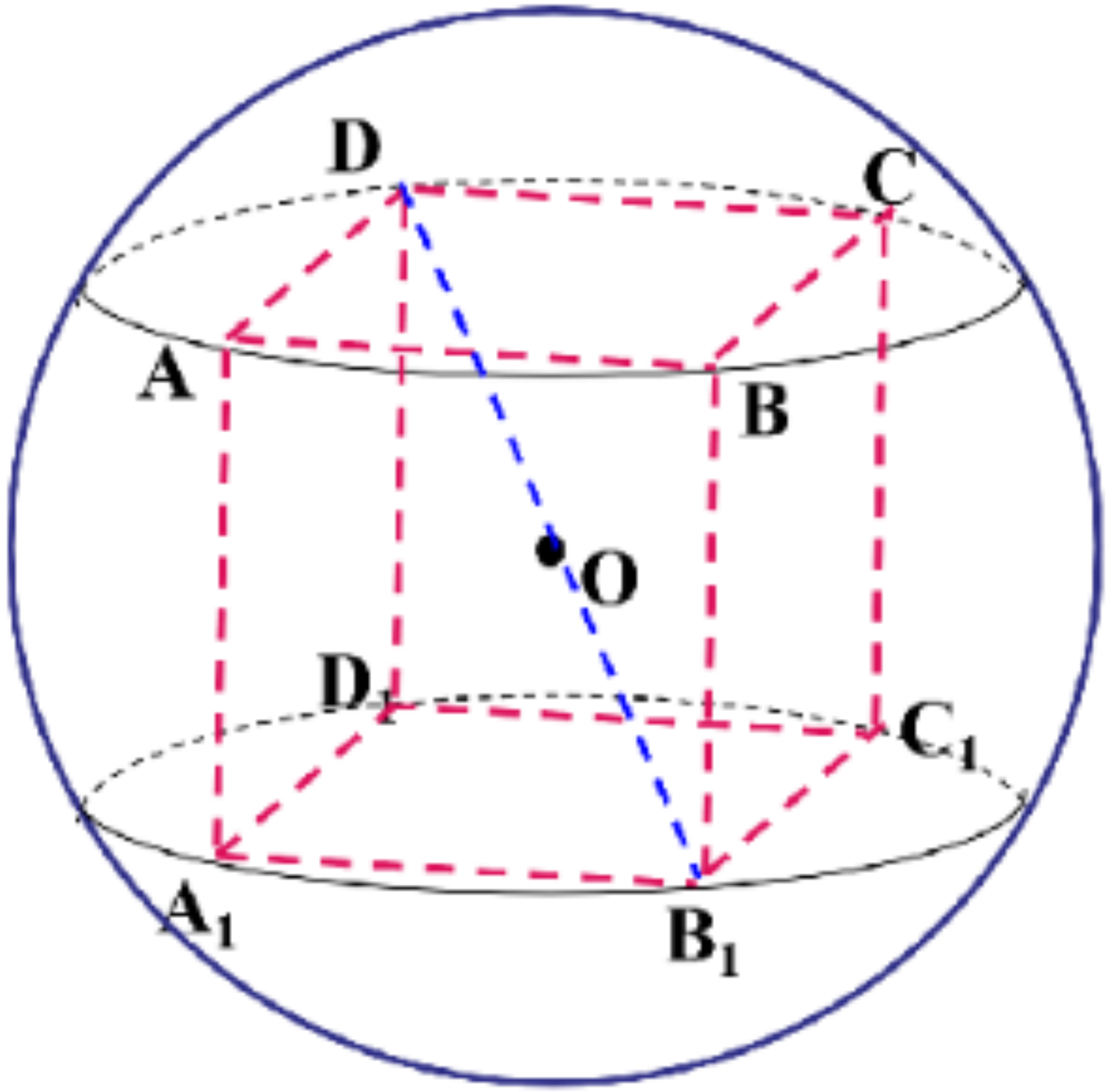
A. $\left[18,\ \frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4},\ \frac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{27}{4},\ \frac{64}{3}\right]$　　D. $[18,\ 27]$

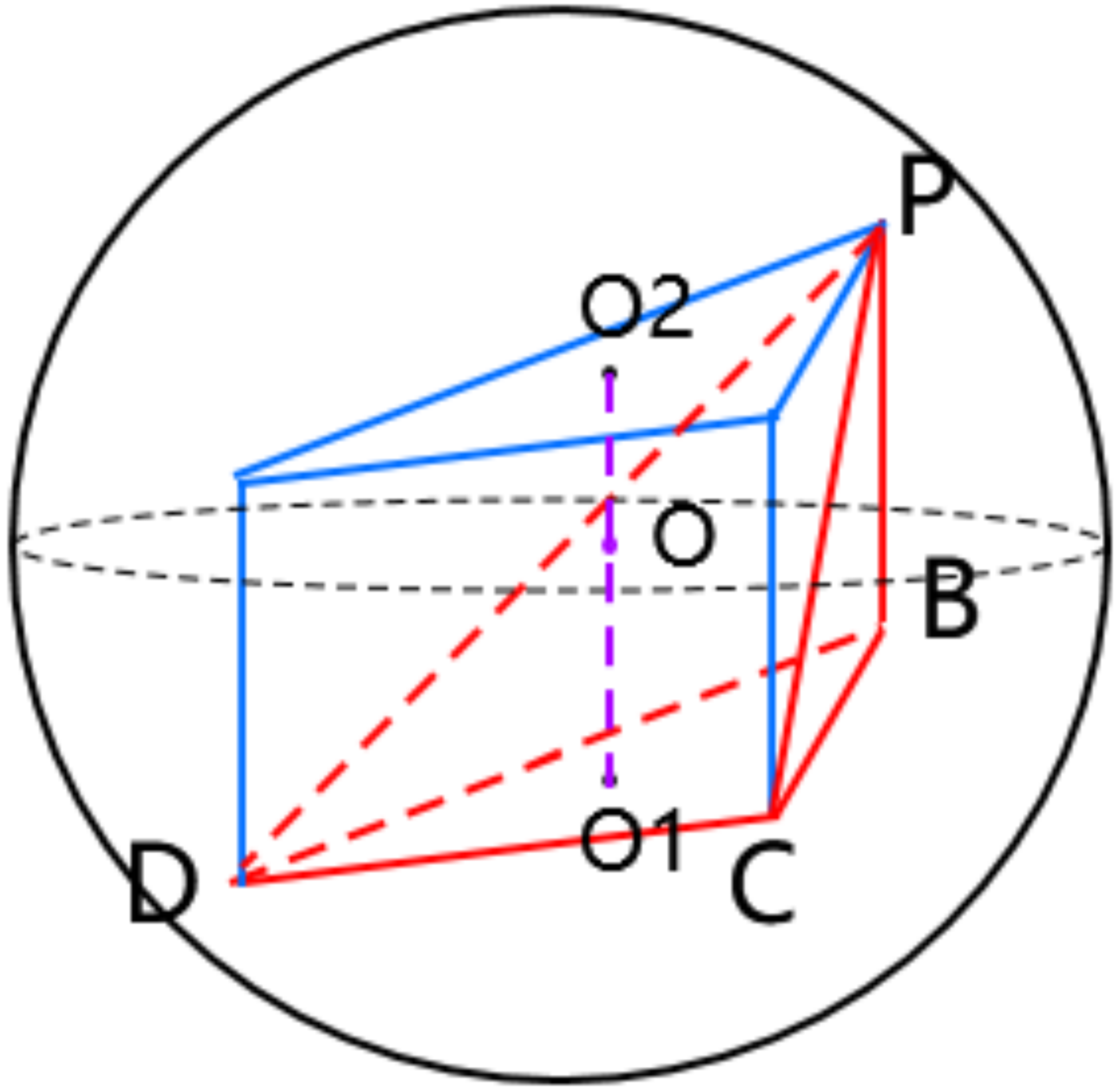
(2022·新高考II卷)已知正三棱台的高为1，上、下底边长分别为$3\sqrt{3}$和$4\sqrt{3}$，所有顶点在同一球面上，则该球的表面积是(　　)

A. 100π　　B. 128π　　C. 144π　　D. 192π

(2022·全国乙卷)已知球O的半径为1，四棱锥的顶点为O，底面的四个顶点均在球O的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为(　　)

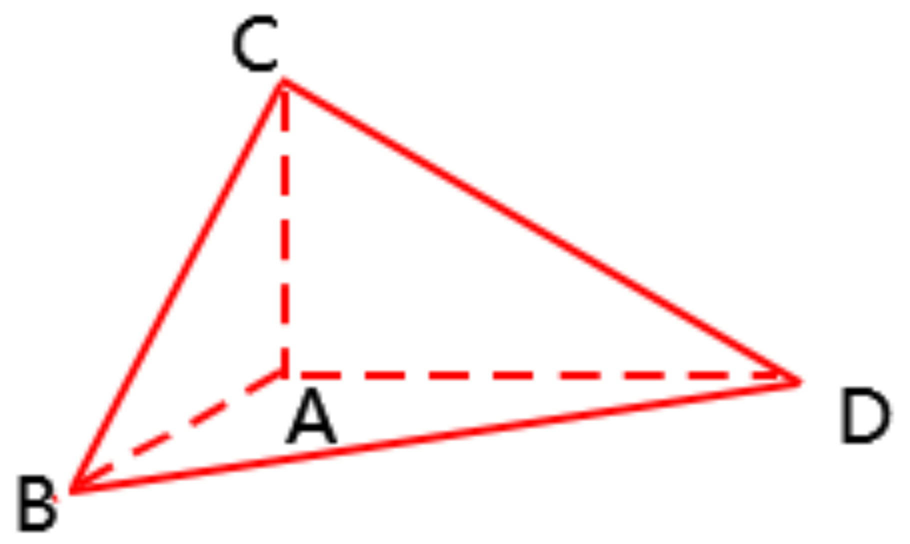
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

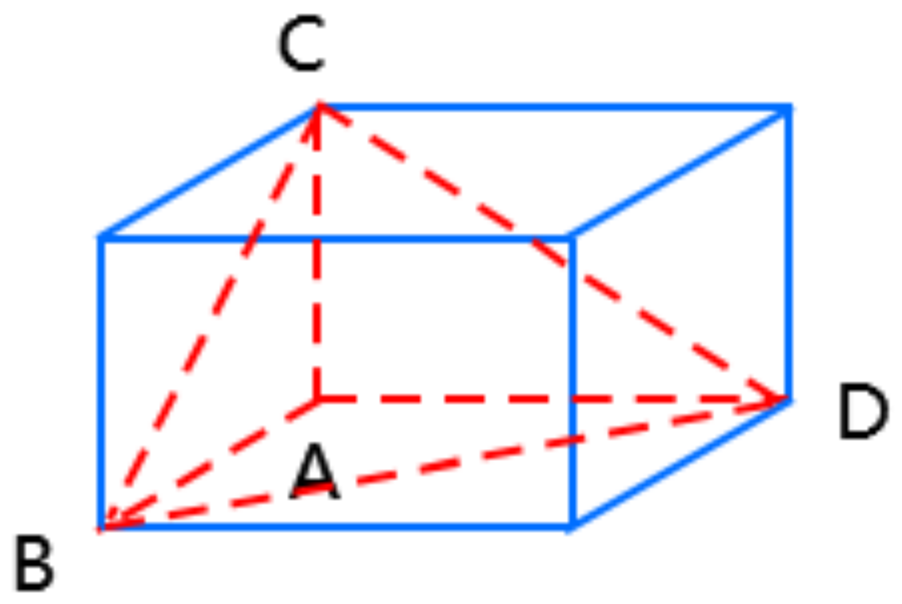

D
C
A
B
O
D_1
C_1
A_1
B_1


P
O2
O
B
O1
D
C

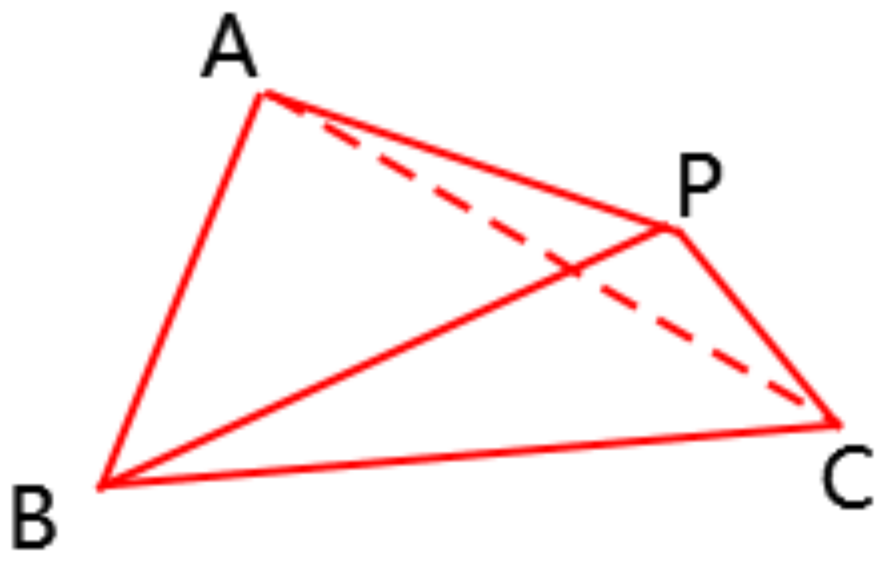
例 1、(1) 已知四面体 $ABCD$ 的每个顶点都在球 O 的球面上，AB，AC，AD 两两垂直，且 $AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，$AD=3$，则球 O 的表面积为(　　)

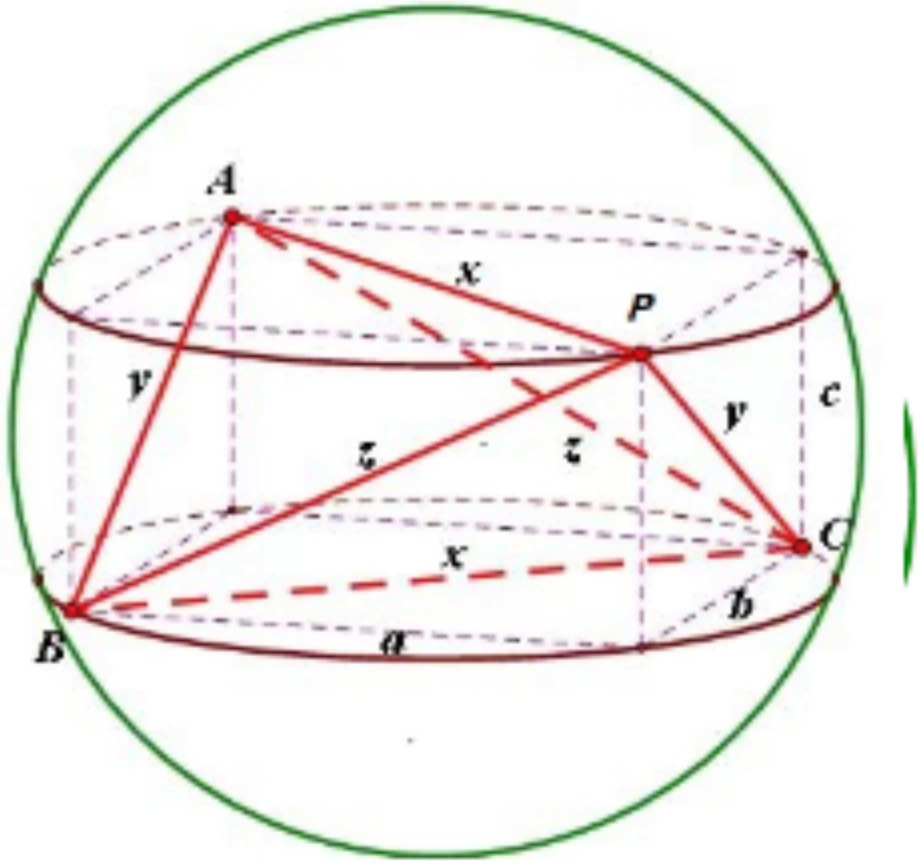
A. 64π　　　　B. 16π　　　　C. 4π　　　　D. π





(2)在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PA=BC=2\sqrt{5}$，$PB=AC=\sqrt{13}$，$AB=PC=5$，则三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的外接球的表面积是______.





对棱相等，补全为长方体

第一步：画出一个长方体，标出三组互为异面直线的对棱；

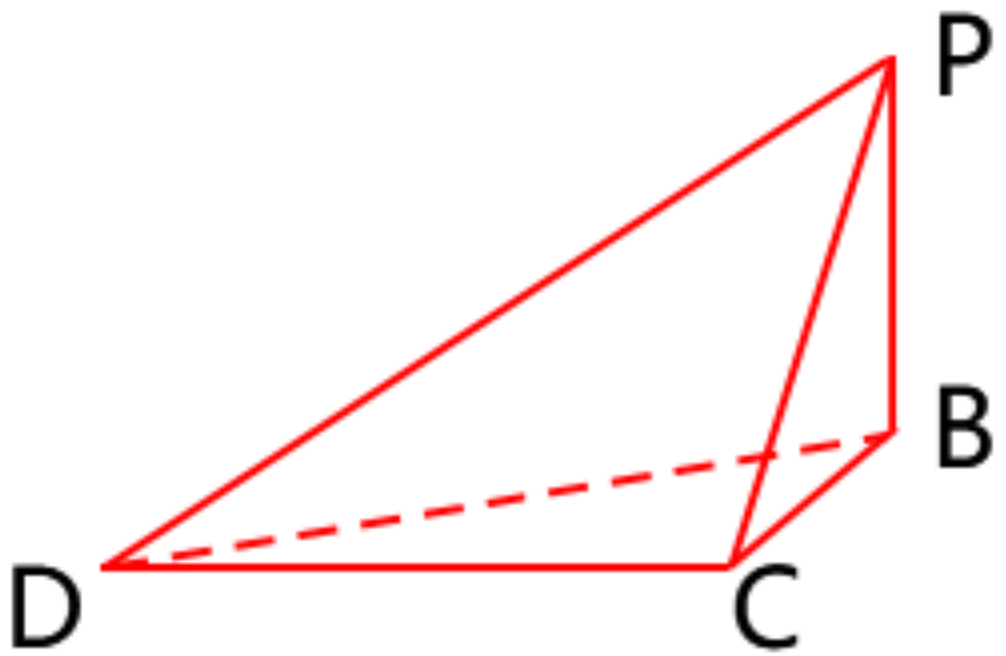
第二步：设出长方体的长宽高分别为 a,b,c，$AD=BC=x$，

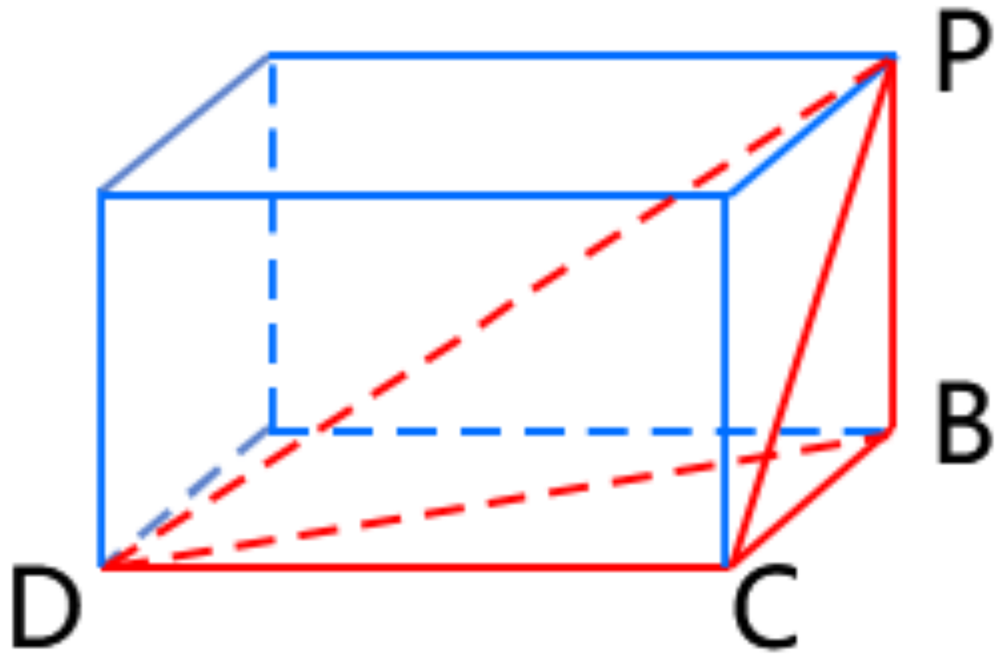
$AB=CD=y$，$AC=BD=z$，列方程组，

$$\begin{cases} a^2+b^2=x^2 \\ b^2+c^2=y^2 \Rightarrow (2R)^2=a^2+b^2+c^2=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}, \\ c^2+a^2=z^2 \end{cases}$$

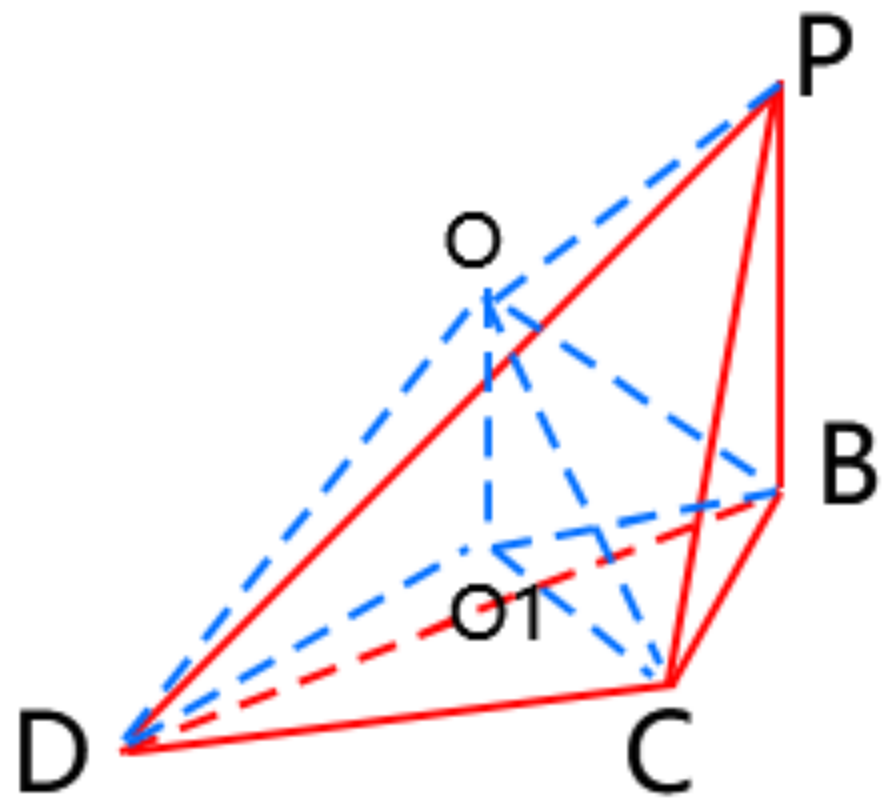
第三步：根据 $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}}$，求出 R。

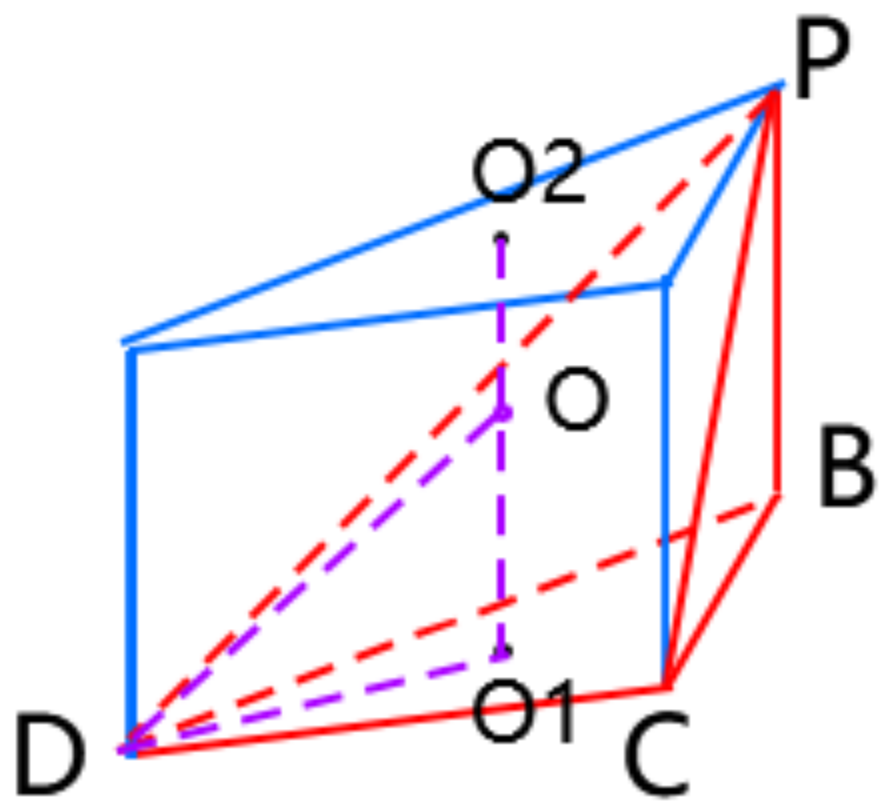
(3)在三棱锥P-BCD中，$BC\perp CD$，$PB\perp$底面BCD，设$BC=1$，$PB=CD=2$，则该三棱锥的外接球的体积为______.

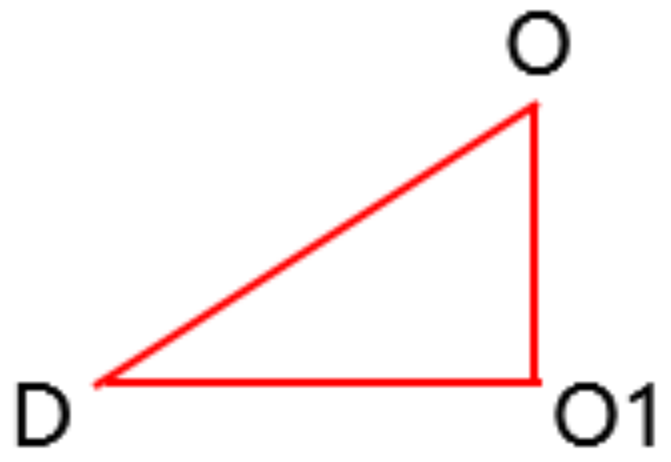




【变式】在三棱锥P-BCD中，$\angle BCD=120°$，$PB\perp$底面BCD，设$BC=1$，$PB=CD=2$，则该三棱锥的外接球的体积为______.

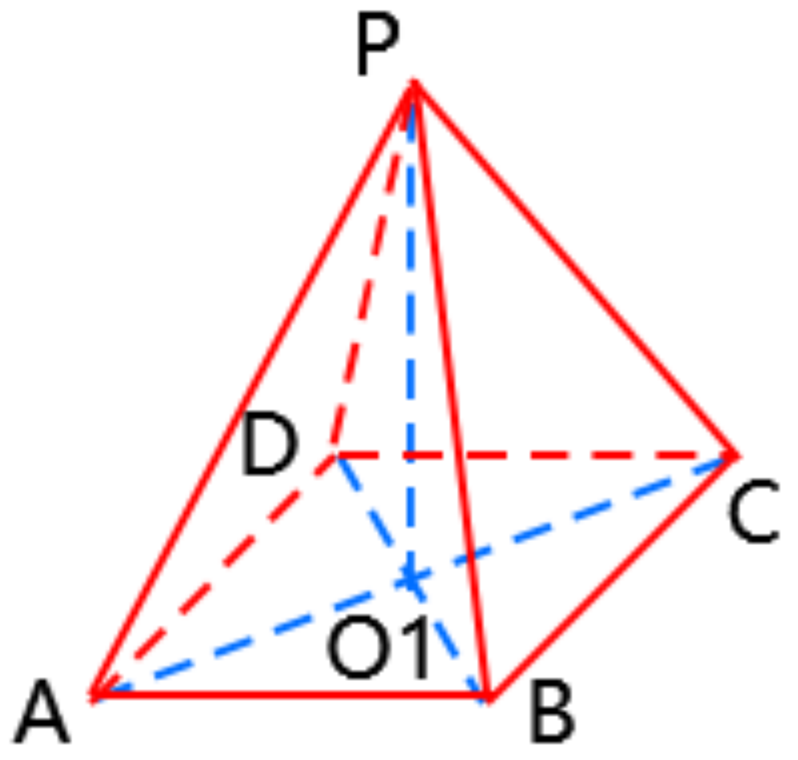


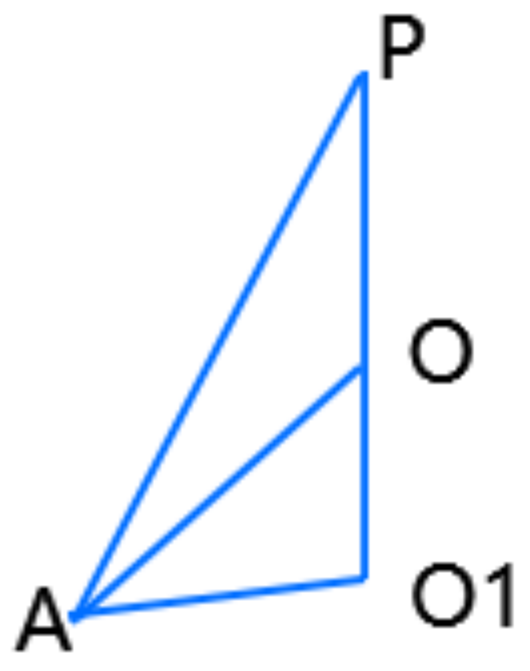




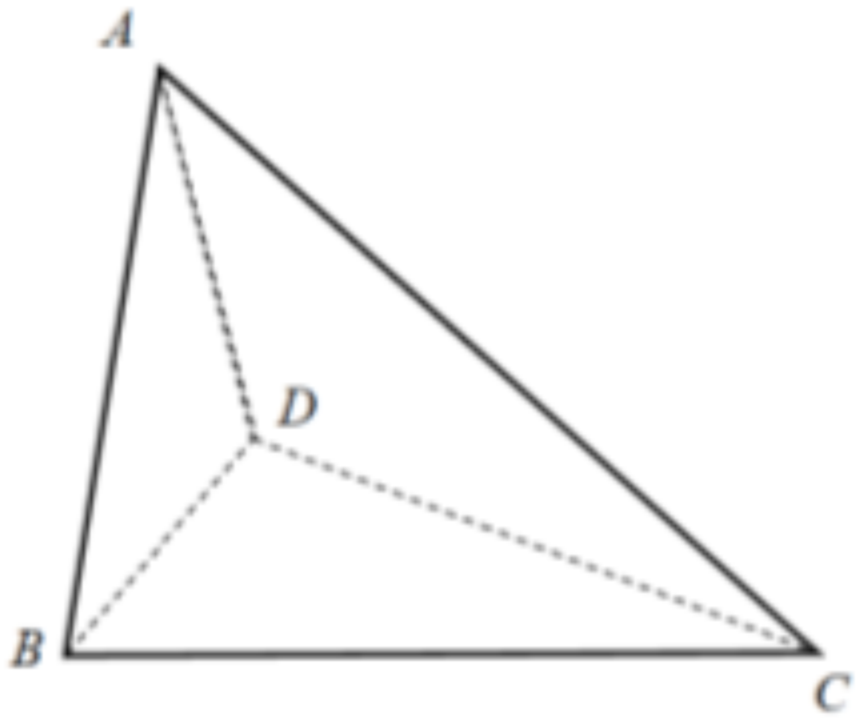
例 2、(2022 全国新高考 I 卷)已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上，若该球的体积为 36π，且 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是(　　)

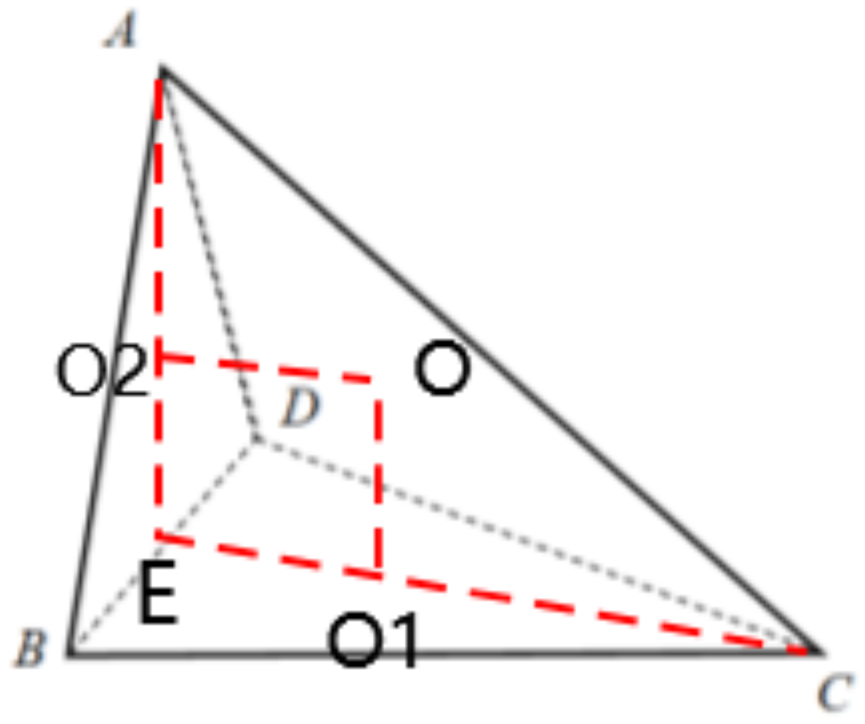
A. $\left[18, \frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$　　D. $[18, 27]$

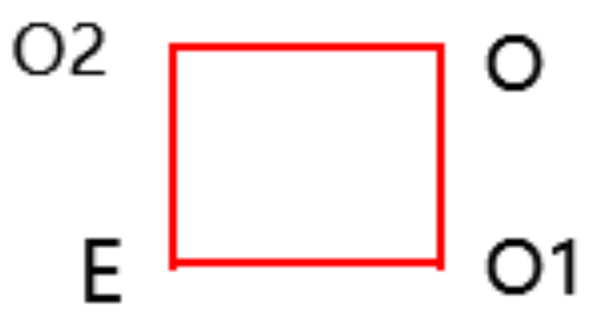


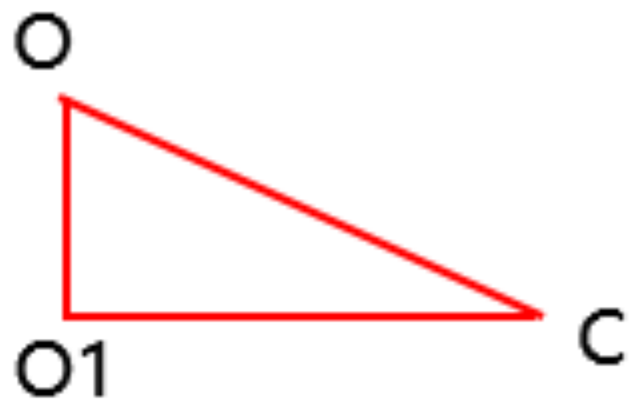


例 3、在边长为$2\sqrt{3}$的菱形$ABCD$中，$A=60^\circ$，沿对角线BD折起，使二面角$A-BD-C$的大小为90°，这时点A，B，C，D在同一个球面上，则该球的表面积为____________.



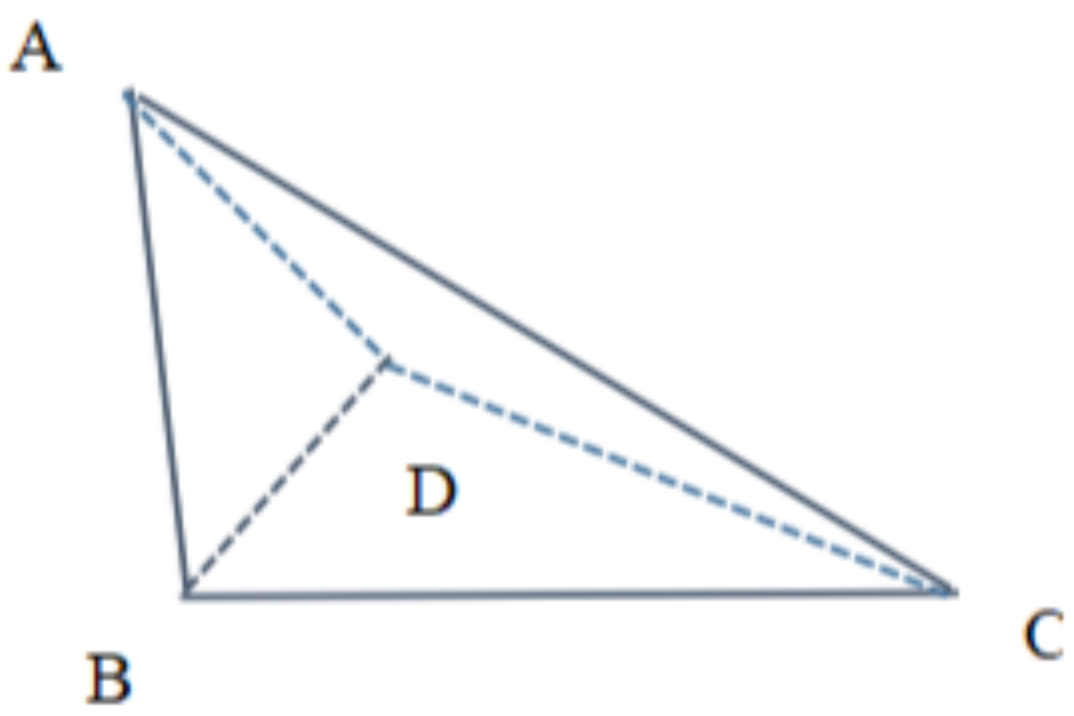


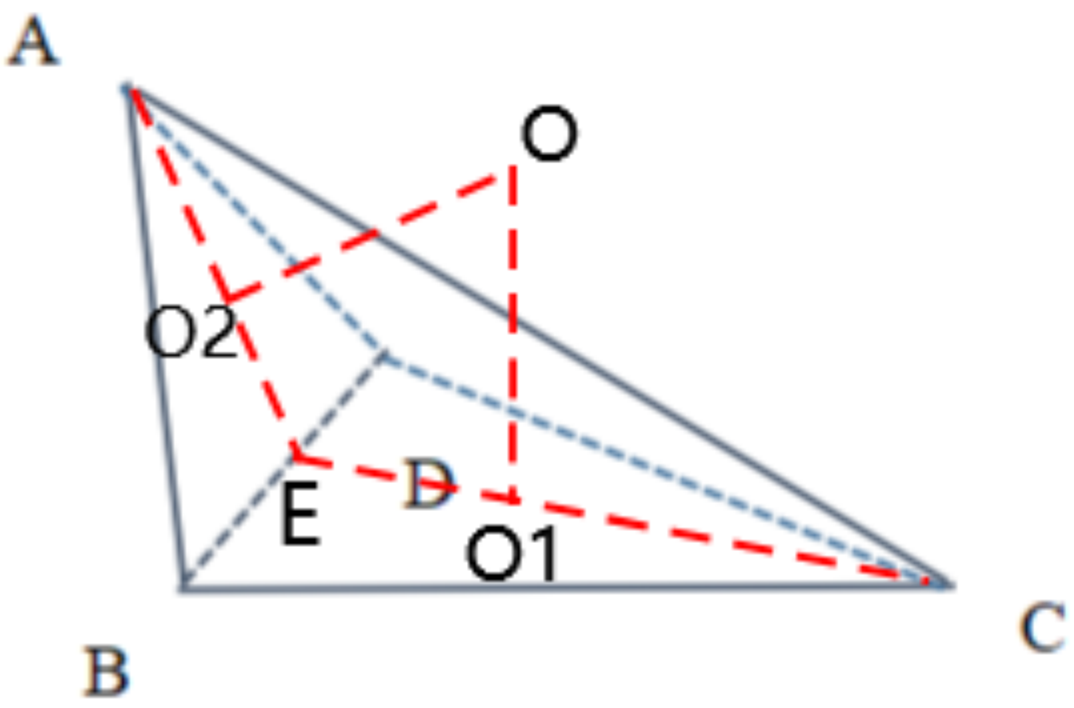


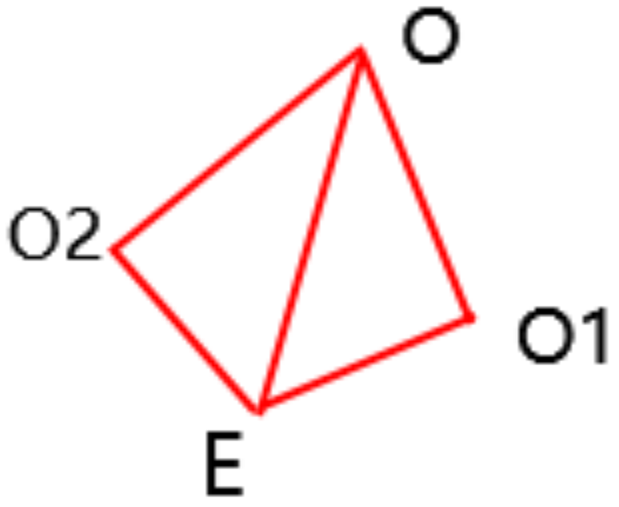


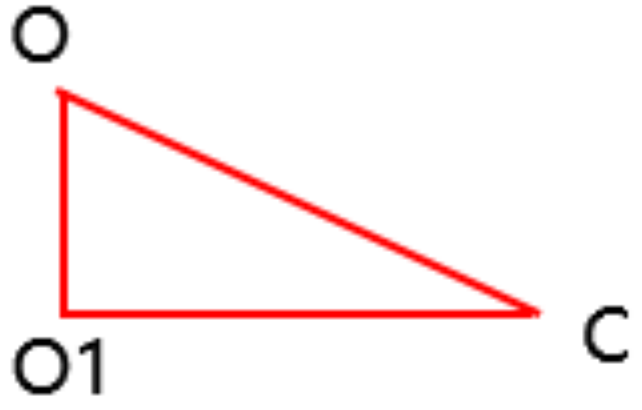
【变式】在边长为$2\sqrt{3}$的菱形$ABCD$中，$A=60°$，沿对角线BD折起，使二面角$A-BD-C$的大小为120°，这时点A，B，C，D在同一个球面上，则该球的表面积为

____________.









外心投影法

1、过两个面的外心做面的垂线

2、确定球心（两垂线的交点）

3、画出半径（连结球心和多面体的一个顶点）

4、构造直角三角形求半径

总结

找外接球球心的方法

1.直接法：(用定义) 找一点，这点到几何体的各个顶点的距离相等。

2.间接法：

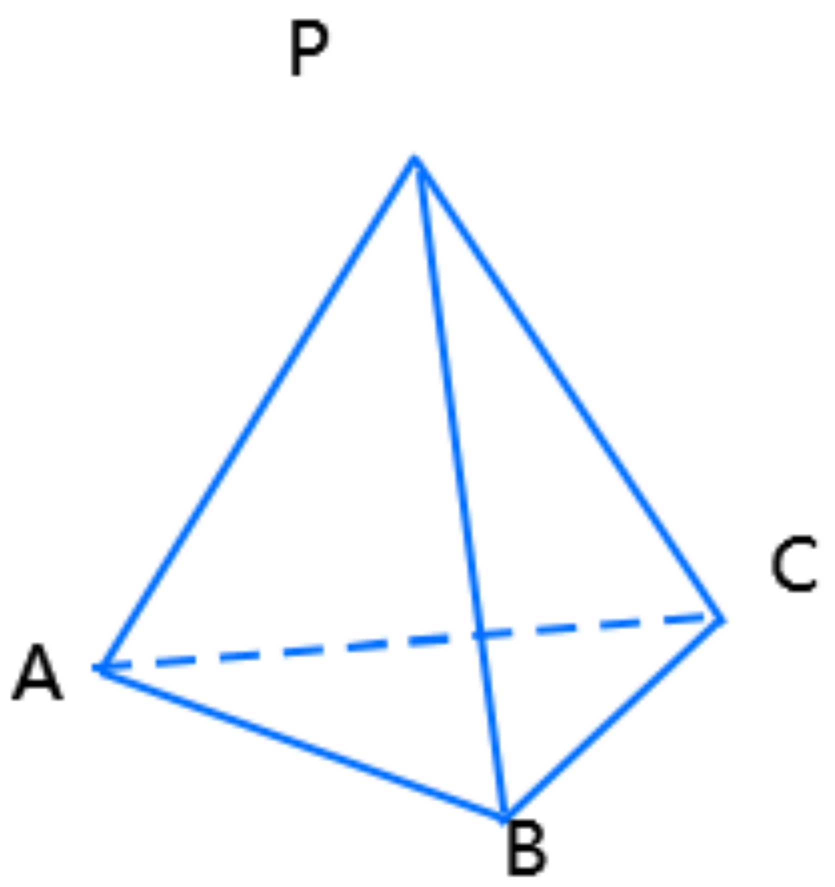
(1)补体法(长方体、直棱柱)

(2)轴截面法(正棱锥、圆锥)

(3)外心投影法

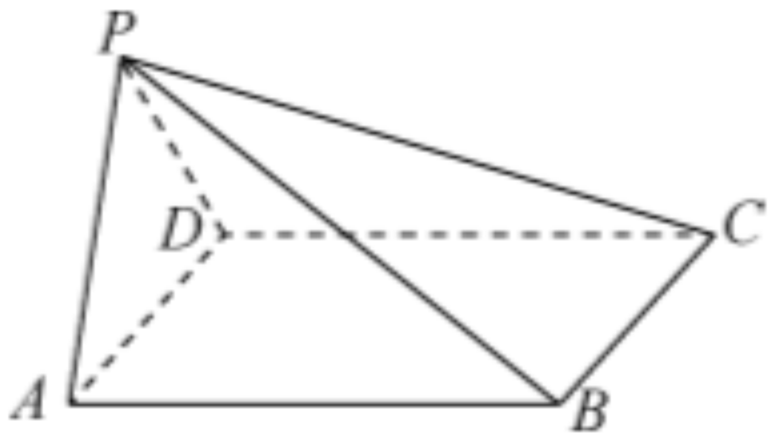
随堂练习

已知三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积为$\frac{\sqrt{3}}{6}$，且 $PA=PB=PC$，$AB=AC=1$，$BC=\sqrt{3}$，则三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的外接球的表面积为_____.



3.如图，已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面为矩形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AD=2\sqrt{2}$，$PA=PD=AB=2$，则四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的外接球的表面积为(　　)

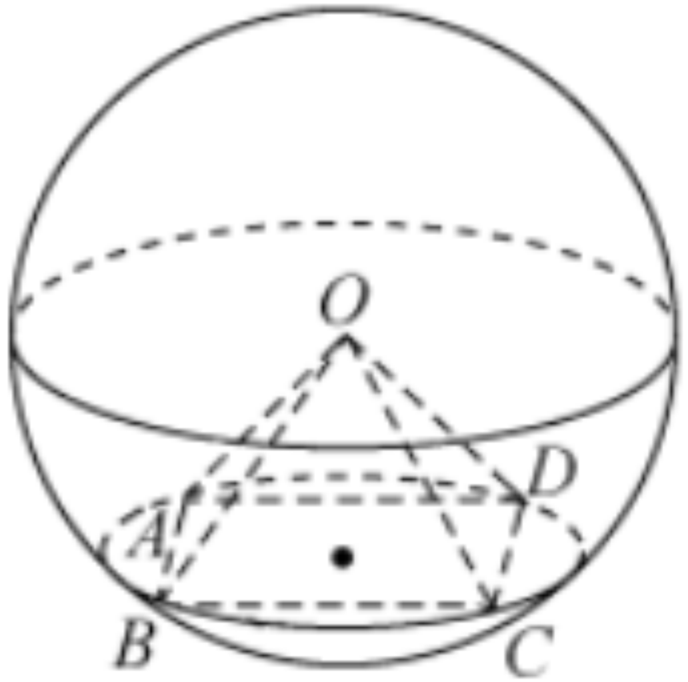
A. 2π　　B. 4π　　C. 8π　　D. 12π



随堂练习

(2022·全国乙卷)已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



例 3.(2022·新高考II卷)已知正三棱台的高为 1，上、下底边长分别为 $3\sqrt{3}$和 $4\sqrt{3}$，所有顶点在同一球面上，则该球的表面积是(　　)

A. 100π　　B. 128π　　C. 144π　　D. 192π