整体代换 以简驭繁

梁洪昌（浙江省宁波北仑区国际教育交流中心）

摘 要：从数学本质出发，将公式、定理局部放大，由简到繁，是提高逻辑思维能力的重要途径，而采用整体代换，再由繁至简，呈现问题的数学本质，是数学能力和数学素养的重要体现。

关键词：由简至繁；由繁到简；整体代换

文章编号：1002-2171(2019)3-0025-02

在高中数学教学中，常常遇到一些由简单题目“改造”而成的较为复杂的题目，教师要采用整体代换思想，拨开迷雾直达数学本质，从而帮助学生深刻体会“由繁至简”的本质，提升学生掌握“由简驭繁”的能力。

1 繁从简来，由繁至简

观察图1，体会由简到繁再由繁至简的过程：

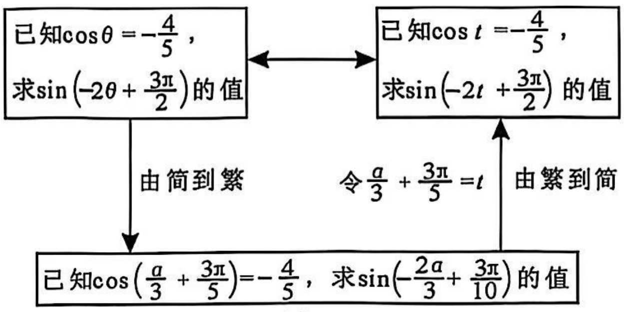

图1

由图1不难发现，已知$\cos\theta=-\frac{4}{5}$，求$\sin\left(-2\theta+\frac{3\pi}{2}\right)$的值，和已知$\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{3\pi}{5}\right)=-\frac{4}{5}$，求$\sin\left(-\frac{2\alpha}{3}+\frac{3\pi}{10}\right)$的值本质上并无不同，后式中只需将$\frac{\alpha}{3}+\frac{3\pi}{5}$用$t$代换，即可达到化繁为简的目的。

例1 已知$x^9=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\cdots+a_8(x-2)^8+a_9(x-2)^9$，求$a_8$。

分析：对于$(2+x)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8+a_9x^9$这样的式子，我们很容易求出$a_8$的值。本题如果能令$x-2=t$，则题目变成已知$(2+t)^9=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_8t^8+a_9t^9$，求$a_8$。

解：令$x-2=t$，即$x=t+2$。则$x^9=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\cdots+a_8(x-2)^8+a_9(x-2)^9$变形为

$$(2+t)^9=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_8t^8+a_9t^9。$$

显然$a_8=C_9^8=9$。

说明：本题有多种解法，但无疑换元后解题较为简便。本题的本质是二项式定理的应用，只是做了简单包装。

例2 已知$\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{b+1}=1(a>0,b>0)$，求$2a+4b$的最小值。

在解本题之前，先看下面一题：

已知$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1(m>0,n>0)$，求$m+3n$的最小值。

解：$m+3n=(m+3n)\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{m}{n}+\frac{3n}{m}+3\geqslant4+2\sqrt{3}$，当且仅当$m=\sqrt{3}n=1+\sqrt{3}$时，取等号。

所以$m+3n$的最小值是$4+2\sqrt{3}$。

显然本题只要令$2a+b=m$，$b+1=n$，则可仿上题求解，答案也就显而易见了。

2 整体代换，减元增效

例3 已知正数a,b,c满足$5c-3a\leqslant b\leqslant4c-a$，$c\ln b\geqslant a+c\ln c$，求$\frac{b}{a}$的范围。

分析：a,b,c均为正数，$\begin{cases}5c-3a\leqslant b,\\4c-a\geqslant b,\\c\ln b\geqslant a+c\ln c\end{cases}\Rightarrow$

$$\begin{cases}\frac{3a}{c}+\frac{b}{c}\geqslant5,\\\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\leqslant4,\\\frac{b}{c}\geqslant e^{\frac{a}{c}}。\end{cases}$$

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

本题有 a,b,c 三个变量，如果能整体代换进行“减元增效”，题目就会变成比较常见的线性规划问题。

设 $\frac{a}{c}=x,\frac{b}{c}=y$（整体代换，三变量变为双变量），则问题转化为 x,y 满足 $\begin{cases}3x+y\geqslant5,\\x+y\leqslant4,\\y\geqslant e^x,\\x>0,y>0。\end{cases}$ 求 $\frac{y}{x}$ 的取值范围。（解答略）

例4 计算：$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2\,007}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\,008}\right)-\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2\,008}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\,007}\right)$。

分析：本题数据较多，直接计算显然无法进行，注意到题中出现的相同算式，因而考虑整体设元。

解：设 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\,007}=a$，则原式 $=(1-a)\cdot\left(a+\frac{1}{2\,008}\right)-\left(1-a-\frac{1}{2\,008}\right)a=a+\frac{1}{2\,008}-a^2-\frac{a}{2\,008}-a+a^2+\frac{a}{2\,008}=\frac{1}{2\,008}$。

3 三角代换，出奇制胜

例5 若实数 x,y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=1$，设 $S=x^2+y^2$，求 $\frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}$ 的值。

分析：由 $S=x^2+y^2$ 联想到 $x^2+y^2=1$，进行三角换元，可以设 $\begin{cases}x=\sqrt{S}\cos\alpha,\\y=\sqrt{S}\sin\alpha,\end{cases}$ 将其代入 $4x^2-5xy+4y^2=1$ 中，求 $S_{\max},S_{\min}$ 的值。

解：设 $\begin{cases}x=\sqrt{S}\cos\alpha,\\y=\sqrt{S}\sin\alpha,\end{cases}$ 将其代入 $4x^2-5xy+4y^2=1$ 中，得

$4S-5S\sin\alpha\cos\alpha=1$，则 $S=\frac{2}{8-5\sin2\alpha}$，由 $\sin2\alpha\in[-1,1]$，得 $S\in\left[\frac{2}{13},\frac{2}{3}\right]$。

则 $\frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}=\frac{3}{2}+\frac{13}{2}=8$。

例6 设 $x,y\in\mathbf{R}_+$，不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$ 恒成立，求 a 的最小值。

分析：分离变量后得到 $a\geqslant\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$ 恒成立，显然只要求不等式右侧代数式的最大值即可。

解：由 $(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2=(\sqrt{x+y})^2$，可作代换，令 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}=\cos\theta,\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}=\sin\theta$，其中 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $a\geqslant\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2}]$。

显然 a 的最小值是 $\sqrt{2}$。

4 基底代换，攻无不克

平面内任意两个不共线的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 可以作为一组基底，从而将平面内的任一向量表示为 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$。

空间中任意三个不共面的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可以作为一组基底，从而将空间中的任一向量表示为 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$。

例7 已知 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda\in\mathbf{R})$，$O$ 是平面内任意一点（O 不在直线 AB 上）。

（Ⅰ）试以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 为基底表示 $\overrightarrow{OP}$；

（Ⅱ）当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，试确定点 P 的位置。

分析：$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 可以表示平面内所有向量，利用平面向量基本定理，将所有向量都用 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 表示即可。

解：（Ⅰ）因为 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 得 $(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$。

所以 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OB}+(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$。

（Ⅱ）当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，由（Ⅰ）可知 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，结合向量加法的几何意义可知，此时点 P 为线段 AB 的中点。

例8 如图2，在平行四边形 $ABCD$ 中，F 是 CD 的中点，AF 与 BD 交于 E，求证：E 为线段 BD 的三等分点。

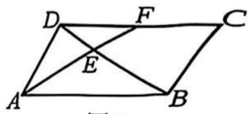

图2

分析：与例7类似，要先选一组基底，从而将所有向量用基底代换即可。$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ 可以当作一组基底，利用平面向量基本定理，将所有向量都用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示即可。

解：设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=AD+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$。

因为 A,E,F 与 B,D,E 分别共线，所以存在实数 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，使 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AF},\overrightarrow{BE}=\mu\overrightarrow{BD}$。

于是 $\overrightarrow{AE}=\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},\overrightarrow{BE}=\mu\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}$。

由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$，得 $(1-\mu)\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，由平面向量基本定理，得 $1-\mu=\frac{\lambda}{2}$ 且 $\mu=\lambda$，解得 $\lambda=\mu=\frac{2}{3}$。

所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$，即 E 为线段 BD（靠近 D）的一个三等分点。

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App